

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ 2025/26 УЧЕБНОГО ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Код/шифр участника

М	1	0	А	7			
---	---	---	---	---	--	--	--

ОСТАПЕНКО Евгений Игоревич

(фамилия, имя, отчество)

10 А

(класс обучения)

10

(класс участия)

Муниципальное бюджетное общеобразова-
тельное учреждение "Школа образования
"Интеграция"

(полное наименование образовательной организации)

ЗАДАЧА № ____	ЛИСТ 1 ИЗ ____	М 10 А 7
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

Задачей 10.1

Пусть x - скорость первого велосипедиста.
Рассмотрим случай, когда велосипидисты едут в одну сторону.

Время движения t обоих велосипедистов равно трем часам, тогда

S_1 (путь 1 велосипедиста) $= 3x$, а S_2 (путь второго велосипедиста) $=$ расстояние от А до В $+ 3x = 9 + 3x$ и v_2 (скорость второго велосипедиста) $= \frac{9+3x}{3}$

Рассмотрим случай движения в разные стороны.

Время движения $t = \frac{1}{3}$ ч, тогда

$S_1 = x \cdot \frac{1}{3}$, а $S_2 = \frac{9+3x}{3} \cdot \frac{1}{3}$, а $S_1 + S_2 = 9$ км,

составим уравнение:

$$x \cdot \frac{1}{3} + \frac{9+3x}{3} \cdot \frac{1}{3} = 9$$

$$x \cdot \frac{1}{3} + (3+x) \cdot \frac{1}{3} = 9$$

$$\frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{3}x = 9$$

$$\frac{2}{3}x = 8$$

$$x = \frac{8}{\frac{2}{3}} = \frac{12}{1}$$

$$x = 12$$

$$v_1 = 12 \text{ км/ч}, \quad v_2 = \frac{9+3 \cdot 12}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 12}{3}$$

$$= 3 + 12 = 15 \text{ км/ч}$$

Ответ: скорость первого - 12 км/ч, а второго - 15 км/ч

Задание 10.2

$$\begin{cases} a_3^2 + a_4^2 + a_5 + a_6 = 2a_3a_4 + 2a_6 + 6 \\ a_5 + a_7 = 3a_6 \end{cases}$$

Пусть $a_1 = a$, $d > 0$ (т.к. прогрессия
возрастающая). Тогда:

$$a_3 = a + 2d, a_4 = a + 3d, a_5 = a + 4d, a_6 = a + 5d, \\ a_7 = a + 6d$$

Подставим во второе уравнение:

$$(a + 4d) + (a + 6d) = 3(a + 5d)$$

$$2a + 10d = 3a + 15d$$

$$a + 5d = 0, a = -5d$$

Подставим $a = -5d$ в первое уравнение

Тогда: $a_3 = -5d + 2d = -3d, a_4 = -5d + 3d = -2d,$

$$a_5 = -5d + 4d = -d$$

$$(-3d)^2 + (-2d)^2 + (-3d) + (-2d) = 2(-3d)(-2d) + 2 \cdot 0 + 6$$

$$\text{Левая часть: } 9d^2 + 4d^2 - 3d - 2d = 13d^2 - 5d$$

$$\text{Правая часть: } 2 \cdot 6d^2 + 0 + 6 = 12d^2 + 6$$

$$13d^2 - 5d = 12d^2 + 6$$

$$d^2 - 5d - 6 = 0$$

$$(d - 6)(d + 1) = 0$$

$$d - 6 = 0 \text{ или } d + 1 = 0$$

$$d = 6$$

$$d = -1$$

и удовлетворяет условиям

$$a_1 = -5d = -5 \cdot 6 = -30$$

$$\text{Ответ: } a_1 = -30, d = 6$$

Задача 10.4

Максимум может обеспечить победу, выбрав стратегию, в которой он вычеркивает две самые заполненные строки. В двух самых заполненных строках может находиться от двух до трех машин. Рассмотрим оба случая.

Если в двух самых заполненных строках по две машины, Максимум вычеркивает эти две строки и ^{у него} остается два хода на вычеркивание двух машин. В таком раскладе он выигрывает.

Если в двух самых заполненных строках по 3 машины, то Максимум их вычеркивает за два хода и выигрывает.

Но может быть и случай, при котором одна самая заполненная строка, она содержит 3 или 4 машины, Максимум ее вычеркивает и у него на оставшиеся 3 или 2 машины, которых он может вычеркнуть за 3 хода.

Ответ: Максимум

Задача 10.5

Так как каждый из 100 10-ти классников знаком не более чем с 14 друзьями. Значит общее число пар знакомых с учетом их равенства

$$\frac{100 \cdot 14}{2} = 700 \text{ пар}$$

Каждый из 30 11-классников знаком хотя бы с 75 друзьями. Максимум с другими 11-классниками - 29, значит каждый 11-ти классник знаком минимум $75 - 29 = 46$ 10-ти классниками.

Общее число знакомств 11 и 10-классников равняется $30 \cdot 46 = 1380$. А так как 700 знакомств 10-10 и 10-11. Пусть m - число знакомств 10-11, а k - число знакомств 10-10. Тогда $2k + m \leq 1400$ ($1400 = 100 \cdot 14$), но $m \geq 1380$
 $2k \leq 20 \Rightarrow k \leq 10$ - пар знакомых среди 10-ти классников. 100 р 10-ти классников в 45-ти комнатах (по принципу Дирихле найдется комната с ≥ 3 -ми 10-ти классниками. В таких комнатах 10 ($100 - 90 = 10$). В каждой из этих комнат наименьшее количество пар, кучна пара знакомых 10-10 (сам 11-ти классник не или они знакомы), но всего всего таких пар ≤ 10 на весь лагерь, а комнат

ЗАДАЧА № ____.	ЛИСТ <u>5</u> ИЗ ____	M 10 A 7
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	ШИФР (заполняется оргкомитетом)

с 33 10-ти классников $\geq 10 \Rightarrow$ хотя бы
 в одной из этих комнат все 10-ти
 классники попарно незнакомы и
 не знакомы с 11-ти классниками $\Rightarrow$
 в этой комнате нет ни одной пары
 знакомых.
 Доказано!

45

ЗАДАЧА № ____ . ____	ЛИСТ ____ ИЗ ____	ШИФР (заполняется оргкомитетом)
	(листы по каждой задаче нумеруются отдельно)	

